

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Dan] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-François Dantzer

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Li] : *Cours d'analyse fonctionnelle*, Daniel Li

[Tau] : *Analyse complexe*, Patrice Tauvel

I Partie A - Espace des fonctions continues sur un compact [Dan]

I.1 Continuité, continuité uniforme

Prop 1 : Si f est une fonction continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle atteint ses bornes.

App 2 : Une application coercive sur $\mathbb{R}^d$ admet un minimum.

Déf 3 (Espace des fonctions continues) :

Thm 4 (Complétude) :

Contre-Ex 5 : Faux pour une autre norme (ex L^2).

Déf 6 (Uniforme continuité) :

Ex 7 : Fonctions lipschitziennes, α -hölériennes.

Contre-Ex 8 :

Thm 9 (Heine) :

App 10 : Les fonctions affines par morceaux $[a, b]$ sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$.

I.2 Compacité (Ascoli)

Déf 11 : Soit E, F eux espaces métriques. On dit que $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$ est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in E^2, (d_E(x, y) < \eta) \implies (\forall f \in A, d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Thm 12 (Ascoli) :

Thm 13 (Cauchy-Peano) :

I.3 Approximation polynomiale [Dem]

Thm 14 (Weierstrass) :

Contre-Ex 15 : $\exp$ ne peut pas être approchée par des polynômes sur $\mathbb{R}$.

Déf 16 (Fonction équioscillante) :

Ex 17 : Polynômes de Tchebychev.

Prop 18 : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d(f, R_n[X]) = \|f - P\|$. Alors $g := fP$ équioscille sur $n + 2$ points de $[a, b]$.

Thm 19 (Meilleure approximation uniforme) :

II Partie B - Espaces L^p

II.1 Généralité [Li] [Bri-Pag]

Déf 20 (Espace L^p) :

Prop 21 (Holder) :

Thm 22 (Minkowski) :

App 23 (Riesz-Fischer) :

II.2 Convolution [Li] [Bri-Pag]

Déf 24 (Convolution) :

Thm 25 (Convolution $L^p - L^q$) :

Ex 26 : Convolution avec une fonction à support compact.

Prop 27 : Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors l'application $\tau_f : x \rightarrow f(\cdot - x)$ est uniformément continue.

Thm 28 (Convolution $L^1 - L^\infty$) :

Thm 29 (Convolution $L^1 - L^p$) :

Cor 30 : $L^1(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach commutative pour la convolution.

Déf 31 (Approximation de l'unité) :

Ex 32 : Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$ d'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x) dx = 1$. Alors la suite définie par $\alpha_n(x) := n^d \alpha(nx)$ est une approximation de l'unité.

Thm 33 : Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une approximation de l'unité. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$\forall n \geq 1, f * \alpha_n \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \alpha_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

App 34 (Inversion de Fourier) :

III Partie C - Espaces des fonctions holomorphes

III.1 Propriétés rigides des fonctions holomorphes [Tau]

Déf 35 (Dérivabilité dans $\mathbb{C}$) :

Ex 36 : Une série entière est dérivable sur son disque de convergence

Thm 37 (Formules de Cauchy) :

Ex 38 : Calculer $\int \frac{dz}{z^2+1}$

Thm 39 (Analyticité des fonctions holomorphes) :

Cor 40 (Zéros isolés) :

Thm 41 (Principe du maximum) :

III.2 Convergence sur tout compact [Tau]

Thm 42 (Complétude) :

Thm 43 (Weierstrass) :

 Dév 44 (Espaces de Bergman) :

 Dév 45 (Runge) :

 Dév 46 (Contre-exemple) :

IV Partie D - Espaces d'applications linéaires

IV.1 Rappels succincts [Li] [Gou]

Déf 47 (Norme subordonnée) :

Prop 48 (Calcul effectif d'une norme subordonnée) :

Ex 49 : Calcul de la norme de $\varphi(u) = \sum u_n/2^n$.

Ex 50 : Norme de l'opérateur de multiplication dans L^p .

Thm 51 (Complétude) :

Thm 52 (Banach-Steinhaus) :

IV.2 Opérateurs compacts, intégraux [Li]

Déf 53 (Opérateur compact) :

Ex 54 (Rang fini) :

Ex 55 : Si $K \in L^2([0,1]^2)$, alors $T_K : f \rightarrow \int_0^1 K(\cdot, y) f(y) dy$ est compact dans $L^2([0,1])$.

Prop 56 : L'ensemble $\mathcal{K}(E, F)$ est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

App 57 : Une limite d'opérateurs de rang finis est compacte.

Prop 58 : $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal bilatère.

App 59 : Un opérateur compact n'est pas inversible si E et F sont de dim infinie.

Thm 60 (Schauder) : L'opérateur $T : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si $T^* : F^* \rightarrow E^*$ est compact.

IV.3 Théorie spectrale et équations intégrales [Li]

Thm 61 : Si $T \in \mathcal{K}(E)$:

- (1) $\ker(I - T)$ est de dim finie.
- (2) $R(I - T)$ est fermée
- (3) Si $I - T$ est injectif, alors il est inversible.

Thm 62 (Alternative de Fredholm) :

Thm 63 (Spectre d'un opérateur compact) :

Ex 64 : Spectre de l'opérateur de Volterra / Quasi-Primitive